Abitur 2012 Mathematik LK Geometrie Aufgabe B2

Teilaufgabe 1. (6 BE)

Gegeben sind zwei Ebenen mit den Gleichungen $E_1 : x + 2z = 1$ und $E_2 : y + 3z = 1$.
Bestimmen Sie die Menge ihrer gemeinsamen Punkte und beschreiben Sie die besondere Lage der beiden Ebenen.

Durch die 3x3-Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sind zwei lineare Abbildungen des $\mathbb{R}^3$ in den $\mathbb{R}^3$ gegeben.

Teilaufgabe 2.1 (6 BE)

Bestimmen Sie die Menge der Punkte, die bei der durch A definierten Abbildung auf sich selbst abgebildet werden (Menge der Fixpunkte) und beschreiben Sie diese geometrisch.
Zeigen Sie, dass diese Punkte auch bei der durch B definierten Abbildung Fixpunkte sind.

Teilaufgabe 2.2 (6 BE)

Ermitteln Sie alle Punkte, die durch die Matrix A auf den Ursprung abgebildet werden.
Beschreiben Sie diese Punktmenge geometrisch.
Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen der hier ermittelten Punktmenge und der Schnittmenge der beiden Ebenen aus Aufgabe 1.

Teilaufgabe 2.3 (2 BE)

Untersuchen Sie, ob A eine Inverse besitzt. Eine Rechnung ist nicht erforderlich.

Eine 3x3-Matrix M beschreibt eine Projektion im $\mathbb{R}^3$, wenn gilt $M^2 = M$.

Teilaufgabe 3.1 (6 BE)

Zeigen Sie, dass A eine Projektion beschreibt, und werten Sie in diesem Zusammenhang die Ergebnisse aus den Aufgaben 2.1 und 2.2 aus.

Teilaufgabe 3.2 (4 BE)

Die 3x3-Matrix C besitze eine Inverse und habe die Eigenschaft $C^2 = C$.
Beweisen Sie, dass C die Einheitsmatrix ist und deuten Sie die Beweisschritte geometrisch.